SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1995-96

Annamaria Montanari

REGOLARITÀ C^∞ DELLE SOLUZIONI DI EQUAZIONI DI TIPO CURVATURA DI LEVI

25 gennaio 1996

Tecnoprint - Bologna 1996

Riassunto. Studiamo la regolarità delle soluzioni dell'equazione di Levi in $\mathbb{R}^{2n+1}$

$$Lu = k\frac{(1+|\nabla u|^2)^{3/2}}{1+u_t^2} \quad in\ \Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1},$$

dove

$$Lu := \sum_{i=1}^{n}\left(u_{x_ix_i} + u_{y_iy_i} + 2\frac{u_{y_i} - u_{x_i}u_t}{1+u_t^2}u_{x_it} - 2\frac{u_{x_i} + u_{y_i}u_t}{1+u_t^2}u_{y_it} + \frac{u_{x_i}^2 + u_{y_i}^2}{1+u_t^2}u_{tt}\right),$$

mentre $k \in C^\infty(\Omega)$ e $k(\xi) \neq 0$ per ogni $\xi \in \Omega$.

Si tratta di un'equazione quasilineare del secondo ordine la cui forma caratteristica è semidefinita positiva ed ha determinante nullo in ogni punto e per ogni $u \in C^2$. Mostriamo che esistono dei campi vettoriali X_i e Y_i, che dipendono dal gradiente di u, tali che

$$Lu = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2u + Y_i^2u + c(u)[X_i, Y_i]u\right).$$

Studiamo dapprima la regolarità delle soluzioni dell'equazione lineare che si ottiene congelando l'operatore L. Poi, applicando i risultati ottenuti, dimostriamo la regolarità C^∞ delle soluzioni dell'equazione non lineare.

Abstract. We study the regularity of the solutions of the Levi equation in $\mathbb{R}^{2n+1}$

$$Lu = k\frac{(1+|\nabla u|^2)^{3/2}}{1+u_t^2} \quad in\ \Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1},$$

where

$$Lu := \sum_{i=1}^{n}\left(u_{x_ix_i} + u_{y_iy_i} + 2\frac{u_{y_i} - u_{x_i}u_t}{1+u_t^2}u_{x_it} - 2\frac{u_{x_i} + u_{y_i}u_t}{1+u_t^2}u_{y_it} + \frac{u_{x_i}^2 + u_{y_i}^2}{1+u_t^2}u_{tt}\right),$$

while $k \in C^\infty(\Omega)$ and $k(\xi) \neq 0$ for every $\xi \in \Omega$.

It is a second order quasilinear equation whose characteristic matrix is positive semidefinite and has vanishing determinant at every point and for every function $u \in C^2$. We show that there exist some vector fields, X_i e Y_i, which depend on the gradient of u, such that

$$Lu = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2u + Y_i^2u + c(u)[X_i, Y_i]u\right).$$

First we study the regularity of the solutions of the linear equation which is obtained by freezing the operator L. Then, by using these results, we prove the C^∞ regularity of the solutions of the non linear equation.

1 Introduzione e principali risultati

In questo seminario mostriamo alcuni risultati ottenuti in collaborazione con G. Citti.

Presenteremo un risultato di regolarità per le soluzioni dell'equazione di Levi

$$Lu = k\frac{(1+|\nabla u|^2)^{3/2}}{1+u_t^2} \quad in\ \Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}, \tag{1}$$

dove

$$Lu := \sum_{i=1}^{n}\left(u_{x_ix_i} + u_{y_iy_i} + 2\frac{u_{y_i} - u_{x_i}u_t}{1+u_t^2}u_{x_it} - 2\frac{u_{x_i} + u_{y_i}u_t}{1+u_t^2}u_{y_it} + \frac{u_{x_i}^2 + u_{y_i}^2}{1+u_t^2}u_{tt}\right) \tag{2}$$

e $k \in C^\infty(\Omega)$. Qui abbiamo indicato con (x, y, t) un punto di $\mathbb{R}^{2n+1}$, u_{x_i} la derivata prima rispetto a x_i, ∇u il gradiente euclideo di u in $\mathbb{R}^{2n+1}$.

L'equazione (1) ha interesse dal punto di vista geometrico in quanto Lu è la traccia della forma di Levi di un'ipersuperficie reale di $\mathbb{C}^{n+1}$ (cfr. [BG1]). k rappresenta una sorta di "curvatura" del grafico di una soluzione u di classe C^2 dell'equazione (1); chiameremo pertanto k la curvatura di Levi.

L'equazione (1) è un'equazione quasilineare del secondo ordine la cui forma caratteristica è semidefinita positiva ed ha determinante nullo in ogni punto e per ogni $u \in C^2$. Pertanto l'equazione di Levi è stata inizialmente studiata con tecniche analoghe a quelle ellittiche.

In particolare Debiard e Gaveau [DG] hanno provato un principio del massimo debole analogo a quello classico. Tomassini [T] ha dimostrato la seguente versione del principio del massimo forte: *se Ω è aperto e connesso, $k : \Omega \to \mathbb{R}$ è continua e non positiva, u è una soluzione dell'equazione (1) di classe C^2 in Ω ed esiste $\xi_0 = (x_0, y_0, t_0) \in \Omega$ tale che $u(\xi_0) = \max_\Omega u$, allora u è costante sull'insieme*

$$\{(x, y, t) \in \Omega : \ t = t_0\}.$$

Più recentemente Slodkowsky e Tomassini hanno provato che, se Ω è pseudoconvesso e k soddisfa un'ipotesi geometrica legata alla curvatura di Levi di $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ (cfr. [ST]), allora il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = k\frac{(1+|\nabla u|^2)^{3/2}}{1+u_t^2} & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \end{cases} \tag{3}$$

ha almeno una soluzione viscosa $u \in Lip(\bar{\Omega})$.

Quando $k = 0$ e $n = 1$ un risultato di esistenza e unicità era già stato provato da Bedford e Gaveau con tecniche puramente geometriche che non sembrano funzionare nel caso $n > 1$. Il loro risultato è il seguente (cfr. [BG2]): *se Ω è pseudoconvesso e $\phi \in C^{m+5}(\partial\Omega)$, il problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = 0 & in\ \Omega \\ u = \phi & sul\ \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

ha una soluzione di classe $C^{m+\alpha}(\Omega) \cap Lip(\bar{\Omega})$, *con* $0 < \alpha < 1$.

Il problema della regolarità interna delle soluzioni era ancora aperto, in particolare per $k \neq 0$, come sottolineato da Tomassini in [T].

Lanconelli, osservando che le tecniche ellittiche non sembrano essere l'approccio più naturale per studiare il problema, ha suggerito di scrivere l'equazione di Levi come somma di quadrati di campi vettoriali, e di dedurre la regolarità delle soluzioni dalle proprietà "geometriche" dei campi stessi. Il primo risultato in questa direzione è un principio del confronto forte per le soluzioni di (1) dimostrato da Citti in [C1]. Se la dimensione dello spazio è $n = 1$ e la curvatura di Levi è diversa da zero in ogni punto di Ω, Citti in [C2] ha mostrato che ogni soluzione di (1) di classe $C^{2,\alpha}(\Omega)$, con $\alpha > \frac{1}{2}$, è di classe $C^\infty(\Omega)$.

Con una tecnica analoga proveremo ora un più generale risultato di regolarità.

Teorema 1.1 *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ *e* $k \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^2)$, $k(\xi, \theta, s) \neq 0$ *per ogni* $(\xi, \theta, s) \in \Omega \times \mathbb{R}^2$. *Se* u *è una soluzione di classe* $C^{2,\alpha}(\Omega)$, *con* $\alpha > \frac{1}{2}$, *di*

$$Lu = k(\xi, |\nabla u|^2, \partial_t u) \quad in\ \Omega, \tag{5}$$

allora u *è di classe* $C^\infty(\Omega)$.

Osserviamo in particolare che questo risultato di regolarità non richiede alcuna ipotesi di crescita del secondo membro di (5), in termini di ξ, $|\nabla u|$ e $\partial_t u$.

2 L'operatore di Levi come somma di quadrati

Se u è una fissata funzione di classe C^2 chiamiamo

$$X_i = \begin{pmatrix} e_i \\ 0 \\ a_i \end{pmatrix}, \quad Y_i = \begin{pmatrix} 0 \\ e_i \\ b_i \end{pmatrix}, \tag{6}$$

dove e_i denota l'i-esimo elemento della base canonica in $\mathbb{R}^n$ e

$$a_i = \frac{u_{y_i} - u_{x_i} u_t}{1 + u_t^2}, \quad b_i = -\frac{u_{x_i} + u_{y_i} u_t}{1 + u_t^2}.$$

Osserviamo che a_i e b_i sono i coefficienti di Lu definito in (2). Identificando i campi vettoriali con gli operatori differenziali del primo ordine si ottiene

$$X_i u = \left(\partial_{x_i} + \frac{u_{y_i} - u_{x_i} u_t}{1 + u_t^2} \partial_t\right) u = \frac{u_{x_i} + u_{y_i} u_t}{1 + u_t^2} = -b_i, \tag{7}$$

$$Y_i u = \left(\partial_{y_i} - \frac{u_{x_i} + u_{y_i} u_t}{1 + u_t^2} \partial_t\right) u = \frac{u_{y_i} - u_{x_i} u_t}{1 + u_t^2} = a_i.$$

Per l'approccio che vogliamo adottare X_i e Y_i sono l'analogo naturale delle derivate nel caso classico. Poichè X_i e Y_i sono campi vettoriali con coefficienti

di classe C^1, allora per ogni $\xi_0 \in \Omega$ esiste un'unica curva integrale γ_i di X_i di punto iniziale ξ_0. Diremo pertanto che una funzione f è derivabile nella direzione X_i nel punto ξ_0 se esiste $\frac{d}{dh}(f \circ \gamma_i)_{|h=0}$ e chiameremo derivata nella direzione X_i di f in ξ_0

$$X_i f(\xi_0) := \frac{d}{dh}(f \circ \gamma_i)_{|h=0}.$$

Denotiamo con C_L^1 l'insieme delle funzioni f tali che $X_i f$ e $Y_i f$ esistono e sono funzioni continue per ogni $i = 1 \ldots n$. Diremo che una funzione f è di classe C_L^k se $X_i f$ e $Y_i f$ sono di classe C_L^{k-1}.

In particolare, se $u \in C_L^2$, allora per (7) a_i e b_i sono di classe C_L^1 e l'operatore L può essere rappresentato in termini dei campi vettoriali X_i e Y_i

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i^2 u + Y_i^2 u - (X_i a_i + Y_i b_i)\partial_t u\right), \tag{8}$$

e

$$|\nabla u|^2 + 1 = (\sum_{i=1}^{n}(X_i u)^2 + (Y_i u)^2 + 1)((\partial_t u)^2 + 1) = (\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + b_i^2 + 1)((\partial_t u)^2 + 1).$$

Pertanto l'equazione (5) diviene

$$Lu = q(\xi, a, b, \partial_t u), \tag{9}$$

dove $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ e $q(\xi, a, b, \partial_t u) = k(\xi, |\nabla u|^2, u_t)$.

Osserviamo che da (7) si ottiene

$$\begin{aligned}
&(X_i a_i + Y_i b_i)\partial_t u \\
&= (X_i Y_i u - Y_i X_i u)\partial_t u = [X_i, Y_i]u\partial_t u = (X_i b_i - Y_i a_i)(\partial_t u)^2 \\
&= -(X_i^2 u + Y_i^2 u)(\partial_t u)^2.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$Lu = \sum_{i=1}^{n}(X_i^2 u + Y_i^2 u)(1 + (\partial_t u)^2). \tag{10}$$

e

$$\sum_{i=1}^{n}[X_i, Y_i] = \sum_{i=1}^{n}(X_i b_i - Y_i a_i)\partial_t \tag{11}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 u + Y_i^2 u)\partial_t = -\frac{Lu}{1 + (\partial_t u)^2}\partial_t = -\frac{k(\cdot, |\nabla u|^2, \partial_t u)}{1 + (\partial_t u)^2}\partial_t.$$

Avendo supposto k sempre diverso da zero allora $\sum_{i=1}^{n}[X_i, Y_i]$ è un multiplo di ∂_t, che risulta pertanto una derivata di altezza 2 rispetto ai campi. Inoltre i campi vettoriali

$$X_i,\ Y_i,\ \sum_{i=1}^{n}[X_i, Y_i] \tag{12}$$

sono linearmente indipendenti in ogni punto e quindi verificano una condizione formalmente analoga a quella di Hörmander per l'ipoellitticità. Questa condizione permette di introdurre una distanza d, naturalmente associata all'operatore L, e le classi di Lipschitz $C_L^{k,\alpha}$ definite in termini della distanza d (cfr. [NSW]).

3 Linearizzazione dell'operatore e risultati di regolarità

L'operatore L è una somma di quadrati di campi vettoriali non lineari in quanto i coefficienti dei campi dipendono dal gradiente di u. Per operatori definiti formalmente nello stesso modo, ma in termini di campi vettoriali lineari, nilpotenti e a coefficienti C^∞, esiste una teoria molto soddisfacente della regolarità delle soluzioni dovuta a Rothschild e Stein [RS]. Abbiamo quindi studiato la regolarità degli operatori in esame con un metodo di tipo "freezing". Fissato un punto ξ_0 associamo a L un opportuno operatore "congelato" L_{ξ_0}, che risulta lineare e somma di quadrati di campi vettoriali di classe C^∞ e nilpotenti.

Sostituiremo ai coefficienti a_i e b_i dei campi vettoriali X_i e Y_i il loro sviluppo di Taylor del primo ordine.

Ogni funzione $v \in C_L^{1,\alpha}(\Omega)$ ha il seguente sviluppo di Taylor:

$$v(\xi) = P^1_{\xi_0} v(\xi) + O(d^{1+\alpha}(\xi, \xi_0)), \tag{13}$$

dove

$$P^1_{\xi_0} v(\xi) = v(\xi_0) + \sum_{i=1}^{n} X_i v(\xi_0)(x_i - x_{0,i}) + Y_i v(\xi_0)(y_i - y_{0,i})$$

e $\xi_0 = (x_0, y_0, t_0) = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n}, y_{0,1}, \dots, y_{0,n}, t_0)$. Denotiamo con

$$X_{i,\xi_0} = \begin{pmatrix} e_i \\ 0 \\ P^1_{\xi_0} a_i \end{pmatrix} \quad e \quad Y_{i,\xi_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ e_i \\ P^1_{\xi_0} b_i \end{pmatrix}, \tag{14}$$

i campi vettoriali congelati in ξ_0, e con

$$L_{\xi_0} = \sum_{i=1}^{n} (X^2_{i,\xi_0} + Y^2_{i,\xi_0} - (X_i a_i + Y_i b_i)(\xi_0)\partial_t), \tag{15}$$

l'operatore congelato associato a L. Il secondo membro dell'equazione (9) dipende da $\partial_t u$, che è, come abbiamo osservato, una derivata di altezza 2 rispetto ai campi. Pertanto questo termine deve essere considerato un operatore completamente non lineare del secondo ordine e come suo congelato si può scegliere l'operatore seguente:

$$\frac{\partial q}{\partial s}(\xi_0, a(\xi_0), b(\xi_0), \partial_t u(\xi_0))\partial_t,$$

dove $q = q(\xi, a, b, s)$. Chiameremo allora Λ_{ξ_0} l'operatore

$$\Lambda_{\xi_0} := L_{\xi_0} - \frac{\partial q}{\partial s}(\xi_0, a(\xi_0), b(\xi_0), \partial_t u(\xi_0))\partial_t.$$

Λ_{ξ_0} è un operatore lineare, somma di campi vettoriali nilpotenti a coefficienti C^∞ che verificano in ogni punto l'ipotesi di Hörmander di ipoellitticità. Esiste allora una soluzione fondamentale Γ_{ξ_0} di Λ_{ξ_0} e inoltre Γ_{ξ_0} è localmente equivalente a $d_{\xi_0}^{-Q+2}$ (cfr. [NSW]), dove d_{ξ_0} è la distanza di controllo associata a Λ_{ξ_0} e $Q = 2n + 2$ è la dimensione omogenea dello spazio. Nel caso $n = 1$ la soluzione fondamentale dell'operatore congelato si scrive esplicitamente in quanto esiste un cambiamento di variabile che trasforma Λ_{ξ_0} nel Laplaciano di Kohn sul gruppo di Heisenberg. Nel caso $n > 1$ non si può sperare di procedere in modo analogo in quanto l'algebra di Lie generata dai campi vettoriali congelati non è libera. In altre parole sappiamo che $X_i, Y_i, \sum_{i=1}^n [X_i, Y_i]$ sono linearmente indipendenti, ma non abbiamo alcun controllo dei commutatori misti del tipo $[X_i, Y_j]$.

Sono comunque note le seguenti stime della soluzione fondamentale e delle sue derivate in termini della distanza di controllo d_{ξ_0} (cfr. [S]):

$$|D_{j_1,\xi_0} \cdots D_{j_s,\xi_0} \Gamma_{\xi_0}| \leq C_s d_{\xi_0}^{2-Q-s}, \tag{16}$$

dove abbiamo indicato con

$$D_{i,\xi_0} := X_{i,\xi_0},$$
$$D_{n+i,\xi_0} := Y_{i,\xi_0},$$

per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Nell'appendice richiamiamo una formula di rappresentazione per le soluzioni di (5) in termini di Γ_{ξ_0}. Il risultato di regolarità che abbiamo enunciato si ottiene stimando gli integrali che compaiono nella formula stessa. Per fare questo non sono sufficienti le stime (16) e occorre studiare la dipendenza di $\Gamma_{\xi_0}(\xi, \zeta)$ dalla variabile ξ_0.

Proposizione 3.1 *Siano ξ_0 e ξ_1 due punti fissati in Ω e sia $S = \{\zeta : d(\xi_1, \zeta) \geq 2d(\xi_1, \xi_0)\}$. Allora Γ_{ξ_0} e Γ_{ξ_1} soddisfano su S la seguente stima: esiste una costante $c > 0$ tale che*

$$|\Gamma_{\xi_0}(\xi_0, \zeta) - \Gamma_{\xi_1}(\xi_1, \zeta)| \leq c \frac{d^{1+\alpha}(\xi_0, \xi_1)}{d^{Q-1}(\xi_1, \zeta)}. \tag{17}$$

Dimostrazione. Poichè Γ_{ξ_1} è la soluzione fondamentale di L_{ξ_1}

$$\Gamma_{\xi_0}(\xi, \zeta) = -\sum_{i=1}^n \int X_{i,\xi_1}^\theta \Gamma_{\xi_1}(\xi, \theta) X_{i,\xi_1}^\theta \Gamma_{\xi_0}(\theta, \zeta) d\theta \tag{18}$$

$$-\sum_{i=1}^n \int Y_{i,\xi_1}^\theta \Gamma_{\xi_1}(\xi, \theta) Y_{i,\xi_1}^\theta \Gamma_{\xi_0}(\theta, \zeta) d\theta - c(\xi_1) \int \Gamma_{\xi_1}(\xi, \theta) \partial_t \Gamma_{\xi_0}(\theta, \zeta) d\theta,$$

dove $c(\xi_1) = \sum_{i=1}^n X_i a_i(\xi_1) + Y_i b_i(\xi_1)$.

Rappresentando in modo analogo $\Gamma_{\xi_1}(\xi,\zeta)$ si ottiene

$$\Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta) - \Gamma_{\xi_1}(\xi,\zeta) = -\sum_{i=1}^n \int (X^\theta_{i,\xi_1} - X^\theta_{i,\xi_0})\Gamma_{\xi_1}(\xi,\theta) X^\theta_{i,\xi_0}\Gamma_{\xi_0}(\theta,\zeta)d\theta$$

$$-\sum_{i=1}^n \int X^\theta_{i,\xi_1}\Gamma_{\xi_1}(\xi,\theta)(X^\theta_{i,\xi_1} - X^\theta_{i,\xi_0})\Gamma_{\xi_0}(\theta,\zeta)d\theta$$

$$-\sum_{i=1}^n \int Y^\theta_{i,\xi_1}\Gamma_{\xi_1}(\xi,\theta)(Y^\theta_{i,\xi_1} - Y^\theta_{i,\xi_0})\Gamma_{\xi_0}(\theta,\zeta)d\theta$$

$$-\sum_{i=1}^n \int (Y^\theta_{i,\xi_1} - Y^\theta_{i,\xi_0})\Gamma_{\xi_1}(\xi,\theta) Y^\theta_{i,\xi_0}\Gamma_{\xi_0}(\theta,\zeta)d\theta$$

$$+(c(\xi_0) - c(\xi_1)) \int \Gamma_{\xi_1}(\xi,\theta)\partial_t\Gamma_{\xi_0}(\theta,\zeta)d\theta.$$

Poichè questi termini hanno tutti lo stesso andamento studieremo soltanto il primo:

$$\int (X^\theta_{i,\xi_1} - X^\theta_{i,\xi_0})\Gamma_{\xi_1}(\xi,\theta) X^\theta_{i,\xi_0}\Gamma_{\xi_0}(\theta,\zeta)d\theta$$

$$= \int (P^1_{\xi_1} a_i(\theta) - P^1_{\xi_0} a_i(\theta))\partial_t\Gamma_{\xi_1}(\xi,\theta) X^\theta_{i,\xi_0}\Gamma_{\xi_0}(\theta,\zeta)d\theta$$

$$= (P^1_{\xi_1} a_i(\xi_0) - a_i(\xi_0)) \int \partial_t\Gamma_{\xi_1}(\xi,\theta) X^\theta_{i,\xi_0}\Gamma_{\xi_0}(\theta,\zeta)d\theta$$

$$+\sum_{j=1}^n (X_j a_i(\xi_1) - X_j a_i(\xi_0)) \int \partial_t\Gamma_{\xi_1}(\xi,\theta)(x_{\theta,j} - x_{0,j}) X^\theta_{i\xi_0}\Gamma_{\xi_0}(\theta,\zeta)d\theta$$

$$+\sum_{j=1}^n (Y_j a_i(\xi_1) - Y_j a_i(\xi_0)) \int \partial_t\Gamma_{\xi_1}(\xi,\theta)(y_{\theta,j} - y_{0,j}) X^\theta_{i\xi_0}\Gamma_{\xi_0}(\theta,\zeta)d\theta,$$

dove abbiamo indicato con $\theta = (x_{\theta,1}, ..., x_{\theta,n}, y_{\theta,1}, ..., y_{\theta,n}, t_\theta)$.

Tutti gli integrali che qui compaiono sono integrali singolari e possono essere stimati in modo standard usando le stime di Γ_{ξ_0}, Γ_{ξ_1} e delle loro derivate. Per esempio il primo integrale si stima nel modo seguente:

$$\left|(P^1_{\xi_1} a_i(\xi_0) - a_i(\xi_0)) \int \partial_t\Gamma_{\xi_1}(\xi,\theta) X^\theta_{i,\xi_0}\Gamma_{\xi_0}(\theta,\zeta)d\theta\right|$$

$$\leq |(P^1_{\xi_1} a_i(\xi_0) - a_i(\xi_0))| \left|\int \partial_t\Gamma_{\xi_1}(\xi,\theta) X^\theta_{i,\xi_0}\Gamma_{\xi_0}(\theta,\zeta)d\theta\right|$$

anche per l'ipotesi di regolarità di a_i

$$\leq c d^{1+\alpha}(\xi_0,\xi_1) d^{1-Q}(\xi,\zeta).$$

Ragionando in modo analogo si dimostra anche una stima C^α per la dipendenza delle derivate di Γ_{ξ_0} dalla variabile ξ_0:

Proposizione 3.2 *Siano ξ_0 e ξ_1 due punti fissati in Ω. Allora esiste una costante $C > 0$ tale che in $S = \{\zeta : d(\xi_1, \zeta) \geq 2d(\xi_0, \xi_1)\}$ vale la seguente stima:*

$$|D_{j_1,\xi_0} \cdots D_{j_s,\xi_0} \Gamma_{\xi_0}(\xi_0, \zeta) - D_{j_1,\xi_1} \cdots D_{j_s,\xi_1} \Gamma_{\xi_1}(\xi_1, \zeta)|$$
$$\leq C \frac{d^{1+\alpha}(\xi_0, \xi_1)}{d(\zeta, \xi_1)^{Q+s-1}}.$$

Si veda [CM] per la prova completa delle proposizioni 3.1 e 3.2.

Le stime (16), unitamente alla dipendenza C^α di Γ_{ξ_0} e delle sue derivate dal punto ξ_0, permettono di stabilire i primi risultati di regolarità della formula di rappresentazione e quindi delle soluzioni di (5).

Il seguente risultato sfrutta in maniera essenziale la non linearità dell'operatore.

Proposizione 3.3 *Se u è una soluzione di classe $C^{2,\alpha}$ di (5) allora*

$$u \in C_L^{3,\alpha}(\Omega) \text{ e } \partial_t u \in C_L^{2,\alpha}(\Omega).$$

A questo punto consideriamo invece l'operatore L come un operatore lineare, con i coefficienti che dipendono da una soluzione fissata. Fissata una soluzione $u \in C^{2,\alpha}$ dell'equazione (5) possiamo considerare i campi X_i e Y_i come campi vettoriali lineari a coefficienti $a = a_u$ e $b = b_u$ di classe $C_L^{1,\alpha}$ e denotiamo con L_u l'operatore lineare formalmente definito da (8). In particolare

$$L_u u = Lu$$

e per la Proposizione 3.3 i coefficienti $a = a_u$ e $b = b_u$ sono funzioni di classe $C_L^{2,\alpha}$. Per l'operatore lineare L_u vale il seguente risultato, che si può ottenere differenziando la formula di rappresentazione.

Teorema 3.1 *Se $v \in C_L^{2,\alpha}$ è una soluzione di*

$$L_u v = g \in C_L^{1,\alpha}, \tag{19}$$

allora $v \in C_L^{3,\alpha}$.

Si veda [C2] per le prove complete della Proposizione 3.3 e del Teorema 3.1 nel caso $n = 1$.

La regolarità C^∞ della soluzione non si può invece ottenere con il metodo iterativo utilizzato nel caso $n = 1$. Infatti $X_i u$ e $Y_i u$ verificano un'equazione del tipo

$$L_u(X_i u) = f_i, \quad L_u(Y_i u) = g_i$$

con secondo membro non sufficientemente regolare per applicare a queste funzioni il Teorema 3.1. È necessario invece applicare l'iterazione alle derivate nelle direzioni

$$\partial_t, \quad X_i - a_i \partial_t, \quad Y_i - b_i \partial_t.$$

Dimostrazione del Teorema 1.1. Per la Proposizione 3.3 $u \in C_L^{3,\alpha}(\Omega)$ e $\partial_t u \in C_L^{2,\alpha}(\Omega)$. Posto $v = \partial_t u$, derivando rispetto a t l'equazione

$$L_u u - q(\xi, a, b, \partial_t u) = 0, \tag{20}$$

si ottiene che

$$\left(L_u - \frac{\partial q}{\partial s}(\xi, a, b, \partial_t u)\partial_t\right) v \in C_L^{1,\alpha},$$

e poichè $L_u - \frac{\partial q}{\partial s}(\xi, a, b, \partial_t u)\partial_t$ è un operatore lineare a coefficienti $C_L^{2,\alpha}$ del tutto anologo a L_u, per il Teorema 3.1, $v = \partial_t u \in C_L^{3,\alpha}$. Analogamente

$$w_i = X_i u - a_i \partial_t u, \quad w_{n+i} = Y_i u - b_i \partial_t u$$

risultano soluzioni di un'equazione del tipo (19), con secondo membro in $C_L^{1,\alpha}(\Omega)$. Pertanto $w_j \in C_L^{3,\alpha}$ per ogni $j = 1, \ldots, 2n$ e ne viene che $u \in C_L^{4,\alpha}$ e $\partial_t u \in C_L^{3,\alpha}(\Omega)$ (si veda [CM]). Infine, iterando questo metodo, otteniamo che se u è una soluzione di (5) di classe $C_L^{k,\alpha}$ allora $\partial_t u$, $X_i u - a_i \partial_t u$, $Y_i u - b_i \partial_t u$ sono di classe $C_L^{k,\alpha}$. Da questo deduciamo che $u \in C_L^{k+1,\alpha}$ e, per induzione, che $u \in C^\infty$.

Osservazione 3.1 *È possibile dare una definizione diversa di derivate nelle direzioni X_i e Y_i, e quindi delle classi di Lipschitz $C_L^{k,\alpha}$, che permette di dimostrare un risultato analogo al Teorema 1.1 per una soluzione $u \in C_L^{2,\alpha}$ di (5).*

4 Appendice

Fissata una funzione $u \in C_L^{2,\alpha}$ definiamo per ogni $v \in C_L^{2,\alpha}$

$$\Lambda_u v = L_u v - q(\xi, a_u, b_u, \partial_t u).$$

Per la funzione $v \in C_L^{2,\alpha}$ scriviamo una formula di rappresentazione in termini di $\Lambda_u v$ che viene utilizzata per dimostrare la Proposizione 3.3 e il Teorema 3.1.

Poichè questo è un risultato locale, possiamo sempre fissare tre insiemi aperti Ω, Ω_1 e Ω_2 tali che $\Omega_2 \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega$, e una funzione $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ tale che $\phi \equiv 1$ in Ω_1. Studiamo allora $v_{|\Omega_2} = v\phi_{|\Omega_2}$.

Teorema 4.1 *Se $v \in C_{\mathcal{L}}^{2,\alpha}(\Omega)$, allora per ogni ξ e $\xi_0 \in \Omega_2$ possiamo rappresentare $v(\xi) = v\phi(\xi)$ nel seguente modo:*

$$\phi v(\xi) = A(\xi, \xi_0) + \sum_{i=1}^n B_i(\xi, \xi_0) + \partial_t v(\xi_0) \sum_{i=1}^n C_i(\xi, \xi_0) + E_0(\xi, \xi_0)$$

$$+ \sum_{i=1}^n E_i(\xi, \xi_0) + F_A(\xi, \xi_0) + F_B(\xi, \xi_0) + F_Q(\xi, \xi_0),$$

dove

$$A(\xi,\xi_0)=\int\Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\Lambda_u v(\zeta)\phi(\zeta)d\zeta,$$

$$B_i(\xi,\xi_0)=2\int\Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(X_ia_i(\zeta)-X_ia_i(\xi_0)\big)\phi(\zeta)\big(\partial_t v(\zeta)-\partial_t v(\xi_0)\big)d\zeta$$

$$-2\int X_{i,\xi_0}\Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(a_i(\zeta)-P^1_{\xi_0}a_i(\zeta)\big)\phi(\zeta)\big(\partial_t v(\zeta)-\partial_t v(\xi_0)\big)d\zeta$$

$$-2\sum_{k=1}^n(X_ka_i-X_ia_k)(\xi_0)\int(x_{\xi,k}-x_{\zeta,k})\partial_t\Gamma_{\xi_0}\big(a_i(\zeta)-P^1_{\xi_0}a_i(\zeta)\big)\phi(\zeta)\big(\partial_t v(\zeta)-\partial_t v(\xi_0)\big)d\zeta$$

$$-2\sum_{k=1}^n(Y_ka_i-X_ib_k)(\xi_0)\int(y_{\xi,k}-y_{\zeta,k})\partial_t\Gamma_{\xi_0}\big(a_i(\zeta)-P^1_{\xi_0}a_i(\zeta)\big)\phi(\zeta)\big(\partial_t v(\zeta)-\partial_t v(\xi_0)\big)d\zeta$$

$$-\int\partial_t\Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(a_i(\zeta)-P^1_{\xi_0}a_i(\zeta)\big)^2\phi(\zeta)\big(\partial_t v(\zeta)-\partial_t v(\xi_0)\big)d\zeta$$

$$+2\int\Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(Y_ib_i(\zeta)-Y_ib_i(\xi_0)\big)\phi(\zeta)\big(\partial_t v(\zeta)-\partial_t v(\xi_0)\big)d\zeta$$

$$-2\int Y_{i,\xi_0}\Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(b_i(\zeta)-P^1_{\xi_0}b_i(\zeta)\big)\phi(\zeta)\big(\partial_t v(\zeta)-\partial_t v(\xi_0)\big)d\zeta$$

$$-2\sum_{k=1}^n(X_kb_i-Y_ia_k)(\xi_0)\int(x_{\xi,k}-x_{\zeta,k})\partial_t\Gamma_{\xi_0}\big(b_i(\zeta)-P^1_{\xi_0}b_i(\zeta)\big)\phi(\zeta)\big(\partial_t v(\zeta)-\partial_t v(\xi_0)\big)d\zeta$$

$$-2\sum_{k=1}^n(Y_kb_i-Y_ib_k)(\xi_0)\int(y_{\xi,k}-y_{\zeta,k})\partial_t\Gamma_{\xi_0}\big(b_i(\zeta)-P^1_{\xi_0}b_i(\zeta)\big)\phi(\zeta)\big(\partial_t v(\zeta)-\partial_t v(\xi_0)\big)d\zeta$$

$$-\int\partial_t\Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(b_i(\zeta)-P^1_{\xi_0}b_i(\zeta)\big)^2\phi(\zeta)\big(\partial_t v(\zeta)-\partial_t v(\xi_0)\big)d\zeta,$$

$$C_i(\xi,\xi_0)=-2\int\Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(a_i(\zeta)-P^1_{\xi_0}a_i(\zeta)\big)X_{i,\xi_0}\phi(\zeta)d\zeta$$

$$-2\int\Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(b_i(\zeta)-P^1_{\xi_0}b_i(\zeta)\big)Y_{i,\xi_0}\phi(\zeta)d\zeta$$

$$-\int\Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(a_i(\zeta)-P^1_{\xi_0}a_i(\zeta)\big)^2\partial_t\phi(\zeta)d\zeta-\int\Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(b_i(\zeta)-P^1_{\xi_0}b_i(\zeta)\big)^2\partial_t\phi(\zeta)d\zeta,$$

$$E_0(\xi,\xi_0)=\int\Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)v(\zeta)L_{\xi_0}\phi(\zeta)d\zeta,$$

$$E_i(\xi,\xi_0)=2\int\Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)X_iv(\zeta)X_{i,\xi_0}\phi(\zeta)d\zeta$$

$$+2\int\Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)Y_iv(\zeta)Y_{i,\xi_0}\phi(\zeta)d\zeta$$

$$+\int\Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(a_i(\zeta)-P^1_{\xi_0}a_i(\zeta)\big)^2\partial_t v(\zeta)\partial_t\phi(\zeta)d\zeta$$

$$+\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(b_i(\zeta)-P^1_{\xi_0}b_i(\zeta)\big)^2\partial_t v(\zeta)\partial_t\phi(\zeta)d\zeta,$$

$$F_A(\xi,\xi_0)=q(\xi_0,a(\xi_0),b(\xi_0),\partial_t u(\xi_0))\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\phi(\zeta)d\zeta$$

$$-\frac{\partial q}{\partial s}(\xi_0,a(\xi_0),b(\xi_0),\partial_t u(\xi_0))\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\partial_t\phi(\zeta)d\zeta$$

$$-\frac{\partial q}{\partial s}(\xi_0,a(\xi_0),b(\xi_0),\partial_t u(\xi_0))\partial_t u(\xi_0)\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\phi(\zeta)d\zeta,$$

(ricordiamo che la derivata rispetto a s è la derivata rispetto all'ultima variabile)

$$F_B(\xi,\xi_0)=+\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(q(\zeta,a(\zeta),b(\zeta),\partial_t u(\zeta))-q(\xi_0,a(\xi_0),b(\xi_0),\partial_t u(\zeta))\big)\phi(\zeta)d\zeta$$

$$+\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(q(\xi_0,a(\xi_0),b(\xi_0),\partial_t u(\zeta))-q(\xi_0,a(\xi_0),b(\xi_0),\partial_t u(\xi_0))$$

$$-\frac{\partial q}{\partial s}(\xi_0,a(\xi_0),b(\xi_0),\partial_t u(\xi_0))\big(\partial_t u(\zeta)-\partial_t u(\xi_0)\big)\phi(\zeta)d\zeta,$$

$$F_Q=\frac{\partial q}{\partial s}(\xi_0,a(\xi_0),b(\xi_0),\partial_t u(\xi_0))\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(\partial_t u(\zeta)-\partial_t v(\zeta)\big)\phi(\zeta)d\zeta.$$

Dimostrazione. La prova del Teorema 4.1 si ottiene semplicemente integrando per parti la seguente formula di rappresentazione classica:

$$\phi v(\xi)=\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\left(\Lambda_{\xi_0}(\phi v)(\zeta)-\Lambda_u v(\zeta)\phi(\zeta)\right)d\zeta+\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\Lambda_u v(\zeta)\phi(\zeta)d\zeta.$$

Osservazione 4.1 *Osserviamo esplicitamente che F_Q contiene*

$$\frac{\partial q}{\partial s}(\xi_0,a(\xi_0),b(\xi_0),\partial_t u(\xi_0))$$

e

$$\big(\partial_t u(\zeta)-\partial_t v(\zeta)\big),$$

e risulta quindi un termine di regolarizzazione solo se si sceglie $u=v$ nella prova della Proposizione 3.3, $q=0$ nella prova del Teorema 3.1.

Bibliografia

[BG1] E.Bedford, B.Gaveau, *Hypersurfaces with Bounded Levi Form* , Ind. Univ. Math. Jour., **27**, 1978, 867-873.

[BG2] E.Bedford, B.Gaveau, *Envelopes of holomorphy of certain 2-spheres in C^2*, Am. J. of Math., **105**, 1983, 975-1009.

[C1] G.Citti, *A comparison theorem for the Levi equation.* Rend. Mat. Acc. Lincei, serie IX, vol.IV, 3, 1993, 207-212.

[C2] G.Citti, C^∞ *regularity of solutions of the Levi equation*, to appear on Analyse non Linéaire, Annales de l'I.H.P.

[CM] G.Citti, A.Montanari, C^∞ *regularity of solutions of an equation of Levi's type in* R^{2n+1} , preprint.

[DG] A.Debiard, B.Gaveau, *Problème de Dirichlet pour l'équation de Lévi*, Bull. Sc. math, 2e série, **102**, 1978, 369-386.

[NSW] A.Nagel, E.M.Stein, S.Wainger *Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties*, Acta Math. **155**, 1985, 103-147.

[RS] L.Rothschild, E.M.Stein, *Hypoelliptic differential operators and nihilpotent Lie groups*, Acta Math. **137**, 1977, 247-320.

[S] A.Sánchez-Calle *Fundamental solutions and geometry of the sum of squares of vector fields* Invent. math., **78**, 1984, 143-160.

[ST] Z.Slodkowski, G.Tomassini, *Weak solutions for the Levi equation and Envelope of Holomorphy*, J. Funct. Anal, **101**, no. 4, 1991, 392-407.

[T] G.Tomassini, *Geometric Properties of Solutions of the Levi Equation*, Ann. di Mat. Pura e Appl, **152**, 1988, 331-344.